POJ2915 Zuma 题解

南京外国语学校　许昊然

Contents

1 题目大意

祖玛游戏，有长度为N的珠子序列，每种珠子是26种颜色之一。 你可以任意往序列中射入珠子，但射入珠子的颜色必须和其左侧或右侧的颜色相同。当同色珠子的颜色达到M个或以上时，这些珠子就都会消掉。（注意，如果初始序列中已经有大于等于M个连续同色珠子，依然需要射入一颗新的同色珠子才能消掉），消除可以连锁反应。

问至少要射入多少颗珠子，才能消除整个珠子序列。 $N \le 200, M \le 20$

2 算法讨论

2.1 一个简化版的问题

我们不妨先考虑一个简化版问题： COCI版祖玛。COCI版祖玛与本题的唯一区别是：COCI版中，当射入珠子使得同色珠子达到M时，既可以选择消去也可以选择不消去。在这个问题中，因为即使珠子到了M个也可以选择不消去，因此连起来的同色珠子多了不会有任何坏处。我们用$dp[l][r][s]$表示完全消除原序列区间$[l, r]$的珠子外加末尾跟着s个与原序列第r个珠子颜色相同的珠子的序列所需要的时间。 则我们有3种转移。（不妨设原序列中第i个珠子颜色为C_i）

- 当$s < M - 1$时可以选择往最后补一个珠子，转移到$dp[l][r][s+1]$；
- 当$s = M - 1$时可以选择把最后一串消掉，转移到$dp[l][r-1][0]$；
- 找一个$l \le x < r$，且$C_x = C_r$，消掉$[x+1, r-1]$这一段珠子，转移到$dp[l][x][s+1]$；

于是总的转移方程是这样的：

$$dp[l][r][s] = dp[l][r][s+1] + 1 \quad \text{其中} s < M - 1$$
$$dp[l][r][s] = dp[l][r][0] \quad \text{其中} s = M - 1$$
$$dp[l][r][s] = dp[l][x][s+1] + dp[x+1][r-1][0] \quad \text{其中} l \le x < r \text{且} C_x = C_r$$

总时间复杂度是$O(N^3M)$。

2.2 原问题的解答

但上述算法直接应用到原问题中是不对的，因为在原问题中，连续的同色珠子到了M个就会强制消掉，从而使得连续的同色珠子并不是越多越好，比如下面这组数据：

$(1, 2, 1, 3, 1, 1) \quad M = 6$

这时正确的方法应该是先用两个珠子消掉2，然后用两个珠子消掉3，然后1自行消除，共计4个珠子。 但用上面的算法就出错了，因为上面的算法认为如果要把第一个1和最后两个1连起来，必须把中间的(2,1,3)全部消掉。而不能处理先消(1,2,1)中的2，然后保留1，转而去消3的做法。

我们可以修改这个算法。上面那个算法之所以出错，是因为有时候不应该过早的把珠子连成串消掉的。

首先把连续同色珠子合并，合并成二元组$(color, size)$表示颜色为$color$，共计$size$个的连续珠子。因为射入的珠子必须是其左右两侧珠子颜色之一，所以连续颜色块一定不会被拆散。（如果没有这个条件此题就不可做了） 我们不妨把初始队列中大于等于M个的连续同色珠子视为$M-1$个，这样明显是不会改变结果的，但能为后期的处理带来很大的方便。这时，我们发现，即使我们要攒很多珠子一起消，最多只能消掉$2M-2$个珠子。同时，碰撞的两段的每一段长度都小于M。

我们用$A[i]$表示第i个祖玛色段二元组。

我们定义状态$dp[l][r][s]$表示想要消掉$[l,r]$的珠子。并且附带了若干（说明见后）与第r色段珠子颜色相同的珠子，所需最少射击次数。

- 当$s<M$时，表示后面附有s个自由珠子
- 当$M\le s<2M-1$时，表示末尾已经配出了一段尽量长，但长度小于M的同色珠子，还有$s-M$个同色自由珠子可配

这里的s并不一定是实际存在的连续珠子，而可以是一段序列经过一些操作后，可以达到s个连续珠子这个结果. 也就是说，如果$s+A[r].size\ge M$时并不一定引起消除，因为这时s还是一段安全的队列。我们可以先操作s产生自由珠子，然后操作$A[r]$使其和s中的自由珠子配起来，然后再操作s产生一段非自由的珠子，最后消掉间隔自由珠子和非自由珠子的那一段队列，从而引起消除。因此，只要条件允许，即使$s+A[r].size\ge M$我们依然可以扩展s。

对于状态$dp[l][r][s]$我们可以进行如下转移：

- 把第r段以及附带的珠子强行全消掉，转移到$dp[l][r-1][0]$；
- $A[r].size+s<M$时，$A[r]$和s无论怎么处理都不会引起消除，我们找一个$l\le x<r$，且$A[x].color=A[r].color$，消掉$[x+1,r-1]$这一段珠子，转移到$dp[l][x][s+A[r].size]$；
- 当$s<M$但$A[r].size+s\ge M$时，s不可以继续吸纳$A[r]$的珠子了，s这一段变成了非自由的序列。我们找一个$l\le x<r$，且$A[x].color=A[r].color$，消掉$[x+1,r-1]$这一段珠子，$A[r]$变成新的自由珠子。转移到$dp[l][x][M+A[r].size]$；
- 当$s\ge M$且$A[r].size+s<2M-1$时 这时，和第2种转移一样，只是多了一段非自由的珠子。我们不用管它，因为我们转移只需要考虑自由珠子。我们找一个$l\le x<r$，且$A[x].color=A[r].color$，消掉$[x+1,r-1]$这一段珠子，转移到$dp[l][x][s+A[r].size]$；
- 当$A[r].size+s\ge 2M-1$时，$A[r]$不可能参与到s的消除中去，因为如果两段序列如总长度能达到$2M-1$则必然其中一段序列长度会达到M从而引起消除。所以$A[r]$根本不可能参与到s的消除中去。s只能自己消除，$A[r]$变成新的自由珠子。我们找一个$l\le x<r$，且$A[x].color=A[r].color$，消掉$[x+1,r-1]$这一段珠子，转移到$dp[l,x,A[r].size]$；

我们不妨定义$cost(x,y)$表示已经有x个同色珠子段，后面又来了y个同色珠子，暴力消掉

这些珠子需要多少次操作。 那么显然有：

$$
\begin{aligned}
&cost(x,y)=0 \quad 当 y>0 且 x+y\geq M\\
&cost(x,y)=1 \quad 当 y=0 且 x\geq M\\
&cost(x,y)=M-x-y \quad 当 x+y<M
\end{aligned}
$$

于是总的转移方程是这样的：（下面式子中的x的取值均要求满足$l\leq x<r$且$A[x].color=A[r].color$即可）

$$
\begin{aligned}
&dp[l][r][s]=dp[l][r-1][0]+cost(A[r].size,s)\\
&dp[l][r][s]=dp[l][x][s+A[r].size]+dp[x+1][r-1][0] \quad 当 A[r].size+s<M\\
&dp[l][r][s]=dp[l][x][M+A[r].size]+dp[x+1][r-1][0] \quad 当 s<M 且 A[r].size+s\geq M\\
&dp[l][r][s]=dp[l][x][s+A[r].size]+dp[x+1][r-1][0] \quad 当 s\geq M 且 A[r].size+s<2M-1\\
&dp[l][r][s]=dp[l][x][A[r].size]+dp[x+1][r-1][0] \quad 当 A[r].size+s\geq 2M-1
\end{aligned}
$$

总时间复杂度$O(N^3M)$。

3 Special Thanks

- 感谢中国计算机学会提供了这个交流的平台。
- 感谢龙浩民同学在LaTeX方面给予我的大量帮助，让我能用LaTeX写出这篇题解。