[Problems I] 家族

[考点] 并查集 枚举性质分析

本次的送分题.
离散化以后不难发现其实本质不同的频段只有 O(m^2)个，我们必须在 O(1)的时间之内求出每个频段的喜爱程度.
如果我们枚举频段下界，然后上界从下界开始不断增加，每次实际上加入了一个或多个权值相同的键. 别忘了我们必须维护加入一个键以后的喜爱程度.
利用并查集，加入键(u, v)时，我们只需要减去原来 u, v 所在家族的喜爱程度，加上 u, v 新形成的家族的喜爱程度.
并查集必须维护每个不相交的集合的大小才能完成这个维护.

由于每次维护是 O(1)的，总的事件复杂度 O(m^2)，不会超时.

[Problems II] 供电网络

[考点] 凸费用费用流 动态加边 流量下界

本题是比较明显的网络流题目.

每个城市抽象成一个点,
对于多余流量 C 的城市 u，就把 S 向 u 连一条流量上下界都是 C 的边.
对于欠流量 C 的城市 u，就把 u 向 T 连一条流量上下界都是 C 的边.

由于中间的边费用是一个二次函数，而且一定是凸的二次函数，我们可以将边按费用的增量分解成很多条边.
不过这样又会导致边数过多，我们需要动态加边.

由于下界的费用流实现有点复杂，这里比较简单的做法需要用到双关键字的费用流这个技巧.
对于流量存在下限的边，我们给它的费用加上-U, U 是一个足够大的正数.
不过这样要注意可能会出现负圈，如果不会写消圈的话，可以先把城市之间的流量下界的流量全部发送过去，附加到一开始城市多余(或缺少)的流量这个数值上去. 这样就不会有负圈了，直接使用 SPFA 即可.
这样做最大流是无穷大，算法是有错误的. 由于费用流增广的时候费用单调增，所以一旦出现最短路径>=0(即路径上没有强制流量导致的-U，增广开始浪费)的情况立即终止.

[Problems III] 城市规划

[考点] 组合数学 分治 FFT

本题是非常经典的计数问题. 我们来考虑 n 个点的无向图有多少种, 答案显然是 2^C(n, 2)种, 我们记这个为 f[n].
我们可以采取一种递推的方式来计算 n 个点的联通无向图有多少种, 记为 g[n].

考虑节点 1 所在的连通块, 枚举它的大小, 我们能够得到 n 个点的所有不连通的无向图个数, 即
\sum_{k=1}^{n-1}{C(n, i)f[n-i]g[i]}
显然, n 个节点的连通图的数目等于所有无向图的个数减去不连通的无向图的数目.
我们有 g[n]=f[n] - \sum_{k=1}^{n-1}{g[i]f[n-i]}
利用这个公式, 我们可以在 O(n^2)的时间内算出结果.
这个复杂度显然是不能通过的, 这个公式本身的优化也无从下手, 我们只能从这个公式的计算方法上面入手进行优化.
观察递推式右边的那个和式, 将组合数拆成 n!(i!)^{-1}(n-i)!^{-1}的形式以后, 不难发现右边整个式子这是一个卷积的形式, 一提到卷积就立刻想到用 FFT 进行优化.
不过, 必须要注意的是, 计算卷积的时候, 要知道 g[n]的值时, g[1], g[2], ..., g[n-1]必须全部已经计算得出.
所以, 我们必须采用分治的方法, Solve(0, n)的时候, 先算出 Solve(0, n / 2), 利用 FFT 计算出前面这 n/2 项对后面的 n/2 项的贡献, 然后再算出 Solve(n / 2, n).
直接使用复数的 FFT 会有精度问题, 需要使用数论变换(NTT).

时间复杂度 O(n lg^2 n)