

graph 解题报告

杭州外国语学校 陈立杰

Contents

1	题目大意	2
2	数据规模与约定	2
3	50%的图是有缺损的网格图	2
4	20%的做法	3
5	50%的做法	3
6	100%的做法	3
6.1	构造平面图的对偶图	3
6.2	求出每个询问点属于的区域	4
6.3	一些实现的细节	4

1 题目大意

平面上有 n 个点（点的坐标都是整数），有 m 条带权直线，每条连接其中的两个点，两直线的公共点只可能是两直线共同的端点。

平面被划分成了很多区域，面积无穷大的区域被称为禁区。

我们有 Q 个询问，每次询问对于两个点 a, b 。求一条曲线连接他们使得不经过禁区且经过直线的权值中最大的最小。

2 数据规模与约定

编号	n, m, q 的范围	x, y 的范围	其他特征
1	$n = 10, m = 13, q = 20$	$0 \leq x \leq 1$ $0 \leq y \leq 2000$	所有直线段的长度均等于 1
2	$n = 2012, m = 3016$ $q \leq 1000$		
3	$n, m \leq 50, q \leq 200$	$0 \leq x, y \leq 1000$	
4	$n, m \leq 100,000$		
5	$q \leq 100,000$		
6	$n, m \leq 2,000$ $q \leq 2,000$	$0 \leq x, y \leq 10^7$	每个有界区域都是凸多边形且每条直线段的权值均等于 1
7			每条直线段的权值均等于 1
8	$n, m \leq 100,000$ $q \leq 100,000$		无
9			
10			

对于全部数据，均满足 $5 \leq n, m, q \leq 100,000$ ，所有直线段的权值不会超过 10^9 。所有询问坐标均为不超过 10^7 的实数，且保证是 0.5 的整数倍。

3 50%的图是有缺损的网格图

我们注意到所有点的坐标都是整数，并且在50%的数据中，所有直线的长度都是1，我们可以发现，整张图就可以看成是一个大的网格图中删掉一些边。

网格图给我们带来了很大便利。我们可以根据这个观察写出简单的程序来取得一些分数。

4 20%的做法

可以发现20%的数据中，网格图只有一行，那么我们可以先划分好格子，然后根据坐标我们可以很轻松的计算出每个询问点属于哪个格子。

接下来很容易发现答案就是两点之间竖着的边中权值最大的那个，简单的模拟即可。

5 50%的做法

要获得更高的分数，需要涉及平面图对偶图的知识，我们把原图中每一个区域看作一个点，两个区域之间有一条公共的边，就在区域对应的点之间连一条权值为该边权值的边。

那么我们注意到我们求出每个询问点属于的区域之后，问题就转变成了询问图上两点间最大边最小的路径。

根据经典的结论，我们可以证明两点间最大边最小的路径就是其在最小生成树上的路径。

那么整个问题就被我们分成了3部分：

- 构造平面图的对偶图
- 求出每个询问点属于的区域
- 构造对偶图的MST，并询问MST上两点间边权最大值

考虑50%的数据，我们注意到数据本质上是一个残破的 $1000 \cdot 1000$ 网格，我们不妨在 $1000 \cdot 1000$ 的网格中，对每个 $1 \cdot 1$ 小方块都建立一个点，如果两个相邻的小方块间不存在原图中的边，他们就属于同一个区域。

这样我们使用简单的BFS算法，就能得出所有的区域。

同时对于定位的问题，我们直接使用坐标，就能得出询问点所在的所有 $1 \cdot 1$ 小方块，继而得出其属于的区域。

求出MST并询问两点边权的最大值是一个非常经典的问题，在此就不再赘述。

6 100%的做法

我们注意到之前算法要推广的一般的输入而非网格图上，我们需要重新解决前2个部分，然后直接套用第三部分的做法就能解决问题。

6.1 构造平面图的对偶图

对于从点 a 到 b 的边 (a, b) ，我们将其拆成两条 $a \rightarrow b$ ， $b \rightarrow a$ 。对边 $a \rightarrow b$ 来说，我们需要求出顺着这条边方向，左侧的区域是什么。

对于每个点，我们都将其出发的所有边 $a \rightarrow *$ 按照角度逆时针排序。

那么我们注意到，假设当前我们处于边 $a \rightarrow b$ ，下一条边是什么呢？容易发现属于 $a \rightarrow b$ 对应区域的下一条边，是 $b \rightarrow a$ 进行顺时针旋转后的下一条边，也就是逆时针角度排序后的前一条边。

那么我们从某边出发，一直按该规则走下去就能得到一个完整的区域。

对于面积无穷大的那个区域，我们可以发现它的面积按叉积法计算之后是负数，就能判断出它是哪个了。

得出区域之后，将 $a \rightarrow b$ 对应区域和 $b \rightarrow a$ 对应区域之间连一条权值为 (a, b) 权值的边，就能建出对偶图了。

6.2 求出每个询问点属于的区域

我们可以使用扫描线算法，注意到我们只要求出每个点向正下方设一条射线的话，遇到的第一个边 $a \rightarrow b$ ，那么 $a \rightarrow b$ 对应的区域就是该点的区域。注意到此时我们只需要考虑所有 $a_x < b_x$ 的边。

那么我们现在我们按 x 轴进行扫描，遇到 $a \rightarrow b$ 的左端点 a_x 时就插入 $a \rightarrow b$ ，右端点 b_x 时就删除 $a \rightarrow b$ 。使用一个平衡树来维护当前所有的线段，询问时就在平衡树中二分查找下方的第一个线段，如果不存在说明属于无穷大区域。

6.3 一些实现的细节

由于维护平衡树时较为繁琐，可能出现一些问题，我们可以在一开始就将所有点整体旋转一个随机角度，这样就能避免处理很多跟 x 权值相等有关的特殊情况，方便写代码。