

# JustForFun EXT 解题报告

杭州外国语学校 陈立杰

## Contents

<b>1</b>	<b>题目大意</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>数据规模与约定</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>问题回顾</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>虚树</b>	<b>2</b>
4.1	虚树的维护	2
4.1.1	插入一个点	3
4.1.2	删除一个点	3
4.1.3	修改一个点的权值	3
<b>5</b>	<b>权值线段树</b>	<b>3</b>
5.1	操作1	3
5.2	操作2	3
5.3	操作3	3
5.4	操作4	4

## 1 题目大意

原题目来自周而进大神2009的Assignment2。

一开始有 $n$ 个节点，没有边，每个点有相应点权。

有4个可能的操作：

- 在 $a, b$ 间加一条边，如果 $a, b$ 已经联通则忽略此操作。
- 修改 $a$ 的点权为 $w$ 。
- 询问 $a, b$ 路径上点权第 $k$ 大的点。
- 询问 $a, b$ 路径上，所有点权小于等于 $c$ 的点的点权积关于28256292的余数。

一共有 $Q$ 个操作，必须在线。

## 2 数据规模与约定

$n \leq 200000, Q \leq 400000$

## 3 问题回顾

首先注意到由于操作1的性质，任何时刻原图都会是一个森林。

周而进大神在当时提出了一个 $O(n \log^2 n + Q \log^3 n \sqrt{n})$ 的做法。

本文提出了一个基于不同思路的 $O((Q + n) \log^2 n)$ 做法。

## 4 虚树

假设在一棵树中，我们目前有兴趣的点只有 $n$ 个，同时我们每次想询问在 $a \rightarrow b$ 路径上的这些我们感兴趣的点的一个整体的信息（比如个数啊，点权积之类的），并且支持修改。

此时我们可以使用动态树来维护，但是如果我们维护整个树的话，如果感兴趣的点非常少，显然浪费就非常大，我们可以对此时的树进行一些压缩。

首先可以注意到假设我们只有2个点，那么如果该两点并没有祖先关系，那么我们只需要再维护一个他们的LCA，只要这3个点就足够回答我们的询问了。

同样的道理，我们进一步研究可以证明，将这 $n$ 个点按照DFS序排序成 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 。那么我们只需要考虑这 $n$ 个点和所有 $Lca_{v_i, v_{i+1}}$ 就行了。

那么我们可以发现，在任意一颗树中维护感兴趣的 $n$ 个点，我们只需要 $O(n)$ 大小的动态树。

### 4.1 虚树的维护

那么接下来我们考虑具体如何维护这个虚树。

#### 4.1.1 插入一个点

这里意味着我们感兴趣的点多了1个，此时我们需要讨论几种情况。

首先假设感兴趣的点全都是该点的子孙，那么我们直接加入该点，并且在动态树中将该点和原先的动态树的根相连，并成为动态树的新根。

否则如果该点往上一直走，那么总会碰到虚树中的点或者边，碰到虚树中的点，我们只需要将它接在该点下面即可，碰到虚树中的边，我们需要在中间分裂该边，并在动态树中加入这两个点就可以了。

#### 4.1.2 删除一个点

删除比较麻烦，我们不妨使用懒删除，就是把点标记为不存在，但是并不是删除它。

#### 4.1.3 修改一个点的权值

修改权值的操作就跟动态树里的一样。

### 5 权值线段树

注意到由于我们必须要求在线，我们可以对权值开线段树，对每个当前的联通子图，我们用一个权值线段树，对于权值范围是 $[l, r)$ 的节点，我们在节点上保存所有点权在 $[l, r)$ 范围内的节点的组成的虚树。

那么对于每个点都被保存了 $O(\log n)$ 次，因此整个结构的大小是 $O(n \log n)$ 。

#### 5.1 操作1

对于连接 $a, b$ 两点的操作，我们不妨将小的那个联通块暴力插入大的联通块中，注意到对每个节点，我们要合并两个动态树的话，只需要将小的联通块对应的动态树的根插入大的即可，复杂度仅为 $O(\log n)$ 。

可以证明这样的合并操作只会有 $O(n \log n)$ 次，所以整体复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

#### 5.2 操作2

修改操作我们可以看成将一个点从原来属于的 $O(\log n)$ 个节点中删除，再按照新权值插入权值线段树，复杂度为 $O(\log^2 n)$ 。

#### 5.3 操作3

询问两点间第 $k$ 大，我们直接在权值线段树上查找，每次询问一个节点内有几个两点间的点，这样复杂度就是 $O(\log^2 n)$ 。

#### 5.4 操作4

跟操作3一样，我们在权值线段树上找出 $[0, c]$ 拆分成的 $O(\log n)$ 个区间，询问这些区间里所有动态树上两点间的权值积，乘起来即可，复杂度为 $O(\log^2 n)$ 。

那么整体复杂度就是 $O((n + Q) \log^2 n)$