JustForFun EXT 解题报告

杭州外国语学校　陈立杰

Contents

1 题目大意

原题目来自周而进大神2009的Assignment2。

一开始有n个节点，没有边，每个点有相应点权。

有4个可能的操作：

- 在a，b间加一条边，如果a，b已经联通则忽略此操作。
- 修改a的点权为w。
- 询问a，b路径上点权第k大的点。
- 询问a，b路径上，所有点权小于等于c的点的点权积关于28256292的余数。

一共有Q个操作，必须在线。

2 数据规模与约定

$n \leq 200000, Q \leq 400000$

3 问题回顾

首先注意到由于操作1的性质，任何时刻原图都会是一个森林。

周而进大神在当时提出了一个$O(n\log^2 n + Q\log^3 n\sqrt{n})$的做法。

本文提出了一个基于不同思路的$O((Q+n)\log^2 n)$做法。

4 虚树

假设在一棵树中，我们目前有兴趣的点只有n个，同时我们每次想询问在$a \to b$路径上的这些我们感兴趣的点的一个整体的信息（比如个数啊，点权积之类的），并且支持修改。

此时我们可以使用动态树来维护，但是如果我们维护整个树的话，如果感兴趣的点非常少，显然浪费就非常大，我们可以对此时的树进行一些压缩。

首先可以注意到假设我们只有2个点，那么如果该两点并没有祖先关系，那么我们只需要再维护一个他们的LCA，只要这3个点就足够回答我们的询问了。

同样的道理，我们进一步研究可以证明，将这n个点按照DFS序排序成v_1，v_2，$\cdots$，v_n。那么我们只需要考虑这n个点和所有$Lca_{v_i,v_{i+1}}$就行了。

那么我们可以发现，在任意一颗树中维护感兴趣的n个点，我们只需要$O(n)$大小的动态树。

4.1 虚树的维护

那么接下来我们考虑具体如何维护这个虚树。

4.1.1 插入一个点

这里意味着我们感兴趣的点多了1个，此时我们需要讨论几种情况。

首先假设感兴趣的点全都是该点的子孙，那么我们直接加入该点，并且在动态树中将该点和原先的动态树的根相连，并成为动态树的新根。

否则如果该点往上一直走，那么总会碰到虚树中的点或者边，碰到虚树中的点，我们只需要将它接在该点下面即可，碰到虚树中的边，我们需要在中间分裂该边，并在动态树中加入这两个点就可以了。

4.1.2 删除一个点

删除比较麻烦，我们不妨使用懒删除，就是把这个点标记为不存在，但是并不是删除它。

4.1.3 修改一个点的权值

修改权值的操作就跟动态树里的一样。

5 权值线段树

注意到由于我们必须要求在线，我们可以对权值开线段树，对每个当前的联通子图，我们用一个权值线段树，对于权值范围是$[l, r)$的节点，我们在节点上保存所有点权在$[l, r)$范围内部的节点的组成的虚树。

那么对于每个点都被保存了$O(\log n)$次，因此整个结构的大小是$O(n \log n)$。

5.1 操作1

对于连接a，b两点的操作，我们不妨将小的那个联通块暴力插入大的联通块中，注意到对每个节点，我们要合并两个动态树的话，只需要将小的联通块对应的动态树的根插入大的即可，复杂度仅为$O(\log n)$.

可以证明这样的合并操作只会有$O(n \log n)$次，所以整体复杂度为$O(n \log^2 n)$。

5.2 操作2

修改操作我们可以看成将一个点从原来属于的$O(\log n)$个节点中删除，再按照新权值插入权值线段树，复杂度为$O(\log^2 n)$。

5.3 操作3

询问两点间第k大，我们直接在权值线段树上查找，每次询问一个节点内有几个两点间的点，这样复杂度就是$O(\log^2 n)$。

5.4 操作4

跟操作3一样，我们在权值线段树上找出$[0, c]$拆分成的$O(\log n)$个区间，询问这些区间里所有动态树上两点间的权值积，乘起来即可，复杂度为$O(\log^2 n)$。

那么整体复杂度就是$O((n+Q)\log^2 n)$