Codeforces Round 146 Div. 1 解题报告

杭州外国语学校　陈立杰

Contents

1 前言

这场CF比赛是由我命题的第一场CF比赛，题目也比较有趣，特地跟大家分享。

2 Problem A

2.1 题目大意

对于$n(n \leq 10^6)$，求出3个不大于n的自然数使得他们的最小公倍数最大。

2.2 题目解法1

首先特判$n < 3$的情况，接下来考虑n是奇数的情况，答案自然是$n, n-1, n-2$。
然后是n是偶数的情况，如果n不是6的倍数，那么答案是$n, n-1, n-3$。
如果n是6的倍数，那么答案是$n-1, n-2, n-3$。
复杂度$O(1)$

2.3 题目解法2

很容易可以发现这3个数都不会太小，直接从$[n-10, n]$中枚举他们判断就行了。
复杂度$O(1)$。

3 Problem B

3.1 题目大意

我们有一个长度为$n(n \leq 10^5)$序列，位置i有p_i的概率是O，否则是X。
对于序列中的每一个极大连续O的子串s，对他的权值贡献$|s|^2$。
比如OOXOOO的权值就是$2^2 + 3^2 = 13$。
求期望权值的大小。

3.2 题目解法

令$E(i, j)$表示从位置i到位置j之间都是O的概率。
容易发现答案就是$\sum_{i,j} E(i, j)$。
这个值使用简单的DP计算就行了。
复杂度$O(n)$。

4 Problem C

4.1 题目大意

给出一个长度为$n(n \le 10^6)$的序列s，同时有$q(q \le 10^5)$个询问，询问的总长度不超过10^6。

每次我们询问对于串q，s有几个子串跟它是循环同构的。

4.2 题目解法

我们先建出s的后缀自动机，在后缀自动机上我们先找出q对应的节点，同时后缀自动机很容易实现在q前后加减字符并找出对应节点的操作，依次求出q的各个循环变体在s中出现了几次即可。

复杂度$O(n)$。

5 problem D

5.1 题目大意

我们有一个$n(n \le 3000)$个点n条边的连通图图。要对它进行一个分治的算法。

每次我们将当前图的大小计入总代价，然后在当前图中随机选择一个点删去，对它剩下的各个连通子图递归处理。

求总代价的期望值。

5.2 题目解法

我们定义$E(i,j)$表示当i点被选择删去的时候，j点跟i连通的概率，那么此时总代价就$+1$了。

因此答案就等于$\sum_{i,j} E(i,j)$。

先考虑树的情况，可以发现$E(i,j)$就是$i \to j$这一条路径上，i是第一个被选择的点的概率，容易证明这就是$\frac{1}{|i \to j|}$。

然后考虑原题，我们注意到原题中可能会有一个环，如果$i \to j$的路径不经过环，那么答案跟树一样，不然他们之间可以有2条路径A,B相连，答案就是i被删去时，通过A相连的概率$+$通过B相连的概率$-$通过A,B都可以相连的概率。这三者通过简单的分析都可以计算。那么原题也就解决了。

6 Problem E

6.1 题目大意

定义$d(n)$表示n的约数的个数。

给出三个数$A,B,C(A,B,C \le 2000)$。求$\sum_{i \le A, j \le B, k \le C} d(ijk)$。

6.2 题目解法1

注意到约数个数是根据素数次幂来计算的。

令$dp_{p,a,b,c}$表示所有素因子都$\geq p$的情况下的答案,p是一个素数。

那么我们分别枚举i,j,k里面关于p的次幂是多少，进行转移即可。

注意到如果$p^2 > \max(a,b,c)$。那么接下来i,j,k都只能是素数或者1了，这种情况我们使用容斥原理就能直接计算了，具体留给大家思考。

同时注意到a/x可能的结果只有$\sqrt{a}$个，那么总体的复杂度就是$O(n^2)$，$n = \max(A,B,C)$。

6.3 题目解法2

我们可以证明一个公式:

$\sum_{i\leq A,j\leq B,k\leq C} d(ijk) = \sum_{i\leq A,j\leq B,k\leq C,\gcd(i,j,k)=1} \lfloor\frac{A}{i}\rfloor\lfloor\frac{B}{j}\rfloor\lfloor\frac{C}{k}\rfloor$。

我们考虑$d(ijk)$，可以发现它等价于满足条件$a|i,b|j,c|k,\gcd(a,b,c)=1$的三元组的个数。

首先两者关于每个素数的都独立，可以分别计算后相乘。

考虑对于每一个素数p,在$d(i,j,k)$中它的乘数是$(p_i+p_j+p_k+1)$，p_i表示i中p的次幂。

而在三元组中，它可能有4种情况$(*,0,0),(0,*,0),(0,0,*),(0,0,0)$，总共的乘数也是$(p_i+p_j+p_k+1)$。

那么我们进行反演，定义$F_x = \sum_{i\leq A,j\leq B,k\leq C,x|\gcd(i,j,k)} \frac{A}{i}\frac{B}{j}\frac{C}{k}$。

那么答案就是$\sum_x \mu(x)F_x$了。

F_x通过直接计算得出就行了。