图中图

【问题描述】

$Answer$在看过碟中谍后，对“X 中 X”很感兴趣，于是想探究“图中图”。

“图中图”的外图是一张由$\boldsymbol{M}$个大节点组成的有$\boldsymbol{K}$条边(**无重边和自环**)的**无向无权图(不一定连通)**,外图中的每个大节点的内部又是一张由若干条边组成的**无向有权图。**

$Answer$想要构一张“图中图”，对大节点之间的边可以随便连$\boldsymbol{K}$条，对每个大节点内部的无向图，$Answer$有一种生成方法：

1. 先确定一个长度为$\boldsymbol{N}$的序列A
2. 对于每个大节点，确定一个在A中的区间$[l_i, r_i]$
3. 那么在第i个大节点中，

$$\text{边数} = \sum_{\text{区间}[l_i,r_i]\text{中存在}x} sum_x + num_x^3$$

其中sum_x为在区间$[l_i, r_i]$中比x小的数字个数，num_x为区间$[l_i, r_i]$中等于x的数字个数。

设t为在区间$[l_i, r_i]$中出现的不重复的数字个数，那么每条边上的权值可以取$1 \sim t$的任意正整数。

现在，$Answer$想要求出在给定M, K,序列A和每个大节点的区间$[l_i, r_i]$的情况下,有多少张不同的“图中图”,由于方案数可能很大,你只需要输出方案数模P后的答案。

*对于大节点，$Answer$只关心边的情况，而不关心点的情况，每个大节点中的边是有标号的，两个方案不同当且仅当，M个大节点的连接状况不同或者至少其中有一个大节点的其中一条边的权值不同。

【数据规模】

设$P = p_1^{c_1} * p_2^{c_2} * \ldots * p_t^{c_t}$，$p_i$为质数。

对于30%的数据，满足$N, M \le 100, M^2 < P \le 10^9$且$P$是质数

另有20%的数据，满足$N, M \le 1000$

对于100%的数据,满足$N, M \le 50000, K \le C_M^2, 0 \le b_i \le 10^9, p_i^{c_i} \le 100000,$

$P \le 10^9$

by Eternal_Answer

【试题考察点】

区间统计+简单数论

【算法分析】

对于这道题目，其实把题目简化就是求：

$$C_{M*(M-1)/2}^{K}*\prod_{i=1}^{M}Ans_i \quad mod \quad P$$

对于Ans_i, 相当于是给了一个序列和一段区间$[l_i,r_i]$, 求

$$t^{\sum_{区间[l_i,r_i]中存在x}(sum_x+num_x^3)}$$

t为区间$[l_i,r_i]$中不同的数字的个数，sum_x为区间中小于x的数字个数，num_x为区间中等于x的数字个数。

算法 1：

对于答案的两部分，我们可以分开来求。

那么对于

$$\prod_{i=1}^{M}Ans_i$$

我们可以先对所有数字离散化，那么序列中的数字都在$1\sim N$之间，然后枚举每一个区间i，然后枚举$[l_i,r_i]$中的每一个数字，用一个数组记录每个数字的出现次数。接着，枚举每一种数字，用前缀和记录数字个数，就能方便地来计算不同数字种数以及：

$$\sum_{区间[l_i,r_i]中存在x}(sum_x+num_x^3)$$

然后再用快速幂计算

$$t^{\sum_{区间[l_i,r_i]中存在x}(sum_x+num_x^3)} \quad mod \quad P$$

那么计算这部分的复杂度就是$O(NM)$

接着，再来计算$C_{M*(M-1)/2}^{K}$

令$x=\frac{M(M-1)}{2}$,$y=K$, 那么也就是计算$C_x^y(0\le y<x\le 10^8)$

因为$C_x^y=\frac{x!}{y!*(x-y)!}$, 而我们发现对于30%的数据有$M\le 1000$，$P>10^6$且为质数。

那么由欧拉定理：当$(a,P)=1$时，$a^{\varphi(P)}\equiv 1\ (mod\ P)$ 得到$y!$在模P下

的逆元就是$(y!)^{\varphi(P)-1}$，$(x-y)!$同理。

那么我们就可以预处理出$1 \le x \le M^2$的$x!\ \ mod\ \ P$和$(x!)^{-1}\ \ mod\ \ P$，然后$O(1)$求出组合数。

空间复杂度：$O(N+M^2)$
时间复杂度：$O(NM+M^2)$
期望得分：30分

算法二：

对于50%的数据，数据只对N,M有制约，而P却不再是质数。

那么，对于前面的那部分答案，还是可以按算法一的来求，对于组合数，可以先对P进行因式分解，$P=p_1^{c_1}*p_2^{c_2}*\ldots*p_t^{c_t}$，求出对每个$p_i^{c_i}$的答案，然后用中国剩余定理进行合并。

然后，问题就变成了如何求$C_x^y\ \ mod\ \ p^c$

令 $C_x^y=\frac{x!}{y!(x-y)!}=\frac{a*p^{t1}}{b*p^{t2}}=\frac{a*p^{t1-t2}}{b}$，这里$(a,p)=(b,p)=1$，如果$t1-t2 \ge c$，那么$res=0$；否则，$res=\frac{a*p^{t1-t2}}{b}\ \ mod\ \ p^c$，因为$(b,p)=1$，所以$(b,p^c)=1$，所以$b^{-1}\ \ mod\ \ p^c=b^{\varphi(p)-1}\ \ mod\ \ p^c$。

那么就是如何求$x!$中包含的p的个数以及$x!$除去所有包含的p后模p^c的值。

先解决第一问：$x!=1*2*3*\ldots*x$，那么把他按模p分类，所有模p不为0的，可以先排除，对所有模p为0的在这一次能贡献出$\frac{x}{p}$个p，然后对所有模p为0的都除以p，那么问题就划归成求$\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor!$中包含$p$的个数，那么可以递归进行，复杂度为$\log_p x$。

代码如下：
```
int Factor_Num(int64 x)
{
    int s=0;
    for (;x;x/=p) s+=x/p;
    return s;
}
```
然后是第二问：同样，对$x!$按模p分类，然后把连续的p^c个一起算，那么这一层对答案的贡献是$sum_{p^c}*\left\lfloor\frac{x}{p^c}\right\rfloor+sum_{x\ mod\ p^c}$，然后对所有模$p$为0的都除以$p$，那么问题就划归成求$\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor!$中除去$p$后的乘积，那么也可以递归进行，复杂度为$\left(\log_p x\right)^2$

by Eternal_Answer

其中sum_x为$1\sim x$中所有不能被p整除的数的乘积。

代码如下：

```
int Calc_Except_P(int64 x)
{
    int s=1;
    for (;x;x/=p)
        s=(int64)s*Power(jc[mo],x/mo,mo) % mo*jc[x % mo] % mo;
    return s;
}
```

空间复杂度：$O(N+10^5)$

时间复杂度：$O(NM+p\text{的质因子数}*(10^5+\left(\log_p 10^5\right)^2)$

期望得分：50分

算法三：

对于求组合数的部分，已经满足时间复杂度要求了，那么就是如何优化第一部分求区间答案的时间复杂度了。

本来题目在那个指数上不是三次方，是想要四次方的。。。然后邪恶的爆了$long\ long$，那么又要对指数维护对各个质因子的模，最后也用中国剩余定理合并，并且由于算$a^b\ mod\ p^c$先要对a提出p^k，然后判断$b*k$是否超过c，那么程序会比较麻烦，所以就出了三次方，那么指数上的答案最大也是不会爆$long\ long$的，所以可以先求出来，然后快速幂。

然后就是怎么求？

由于是区间数字统计类型的题，所以很容易就想到了需要$\sqrt{N}$的方法。

把所有询问区间按首端点的排序，然后把首端点在$i*\sqrt{N}\sim(i+1)*\sqrt{N}$的询问一起做。具体方法就是枚举$i$，表示当前要做区间首端点在$(i-1)*\sqrt{N}\sim i*\sqrt{N}$的询问，把所有这些区间插入到相应的末端点处，然后枚举j从$i*\sqrt{N}$到N，时刻维护当前的$\sum_{\text{区间}[l_i,r_i]\text{中存在}x}(sum_x+num_x^3)$ 以及当前不同的数字数，每到一个区间的末端点处，暴力的插入$l\sim i*\sqrt{N}$这些数字，求出答案，然后在把这些数字去掉。

然后就是怎么计算插入和删除数字对答案的影响。

插入一个数字x：首先对num_x^3 的影响$=(num+1)^3-num^3$，然后是对sum的影响：被动影响=比x大的不同的数字个数，如果原来x是没有的，那么会产生主动影响=比x小的数字数量，并且不同的数字数量加一。

删除一个数字x：首先对num_x^3 的影响$=(num-1)^3-num^3$，然后是对sum的影响：被动影响=-比x大的不同的数字个数，如果原来x是一个的，那么会产生主动影响=-比x小的数字数量，并且不同的数字数量减一。

然后维护比x大的不同的数字个数以及维护比x小的数字数量可以用两个树状数组分别维护。

就此，问题完美解决。

空间复杂度： $O(N+10^5)$

时间复杂度： $O((N+M)\sqrt{N}\log N+p$的质因子数$*(10^5+\left(\log_p 10^5\right)^2)$

期望得分： 100分

【小结】

这道题考察了选手基本的区间统计能力以及基本的数论基础，当然，在写程序的时候也需要选手的仔细，比如在做区间统计使用树状数组的时候，要清楚地明白两个树状数组的作用差别，如果稍不仔细就会把两个树状数组当成一个用。本题在此套互测题中属于较简单题。

by Eternal_Answer