

Sine解题报告

长沙市雅礼中学 伍一鸣

Contents

1	问题简述	2
1.1	题目大意	2
1.2	数据规模	2
2	关键词	2
3	算法一	3
4	算法二	3
5	算法三	3
6	算法四	4
7	Just for fun	5

1 问题简述

1.1 题目大意

$$f(m, n, x) = \sum_{k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=n} \sin(k_1 \cdot x) \cdot \sin(k_2 \cdot x) \cdot \sin(k_3 \cdot x) \cdots \sin(k_m \cdot x) \mid k_i \in \mathbb{N}$$

给定 m, n, x 求解 $f(m, n, x)$

1.2 数据规模

10%的数据, $m \leq 10, n \leq 20$ 最多10组数据

25%的数据, $m \leq 20, n \leq 300$ 最多10组数据

65%的数据, $m \leq 30, n \leq 10^9$ 最多10组数据

100%的数据, $m \leq 30, n \leq 10^9$ 最多300组数据

2 关键词

三角函数和角公式, 矩阵乘法, 折半递归

3 算法一

直接暴力搜索每个数字的拆分，因为只有 n 不超过20，加上 k_i 不小于1的限制，方案数只是 10^5 次方级别的。

时间复杂度： $O(C_n^m)$
期望得分：10分

4 算法二

动态规划。 $f_{i,j}$ 表示 $f(i,j,x)$ 的值转移的时候枚举 k_{i+1} 的值转移即可。

时间复杂度： $O(m \cdot n)$
期望得分：25分

5 算法三

因为 m 很小，所以我们尝试把 m 记录下来然后建立 n 与 $n-1$ 的递推关系。设置一个辅助函数：

$$g(m, n, x) = \sum_{k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=n} \sin(k_1 \cdot x) \cdot \sin(k_2 \cdot x) \cdot \sin(k_3 \cdot x) \cdots \cos(k_m \cdot x) \mid k_i \in \mathbb{N}, k_m > 0$$

若 $m=1$

$$\begin{aligned} f(m, n, x) &= f(m, n-1, x) \cdot \cos x + g(m, n-1, x) \cdot \sin x \\ g(m, n, x) &= g(m, n-1, x) \cdot \cos x - f(m, n-1, x) \cdot \sin x \end{aligned}$$

若 $m > 1$

$k_m=1$ 的部分：

$$\begin{aligned} f(m, n, x) &= f(m-1, n-1, x) \cdot \sin x \\ g(m, n, x) &= f(m-1, n-1, x) \cdot \cos x \end{aligned}$$

$k_m > 1$ 的部分：

$$\begin{aligned} f(m, n, x) &= f(m, n-1, x) \cdot \cos x + g(m, n-1, x) \cdot \sin x \\ g(m, n, x) &= g(m, n-1, x) \cdot \cos x - f(m, n-1, x) \cdot \sin x \end{aligned}$$

$$f(m, n, x) = f(m-1, n-1, x) \cdot \sin x + f(m, n-1, x) \cdot \cos x + g(m, n-1, x) \cdot \sin x$$

$$g(m, n, x) = f(m-1, n-1, x) \cdot \cos x + g(m, n-1, x) \cdot \cos x - f(m, n-1, x) \cdot \sin x$$

根据上述的递推式我们可以构造一个 $2m \times 2m$ 的递推矩阵，使用矩阵乘法加速递推。

时间复杂度： $O(m^3 \cdot \log n)$
期望得分：65分

6 算法四

再设置一个辅助函数

$$h(m, n, x) = \sum_{k_1+k_2+k_3+\dots+k_m=n} \cos(k_1 \cdot x) \cdot \sin(k_2 \cdot x) \cdot \sin(k_3 \cdot x) \cdots \cos(k_m \cdot x) \mid k_i \in \mathbb{N}, k_m > 0, k_1 > 0$$

有了 h 函数之后，我们就可以用折半递归来解决这个问题了，我们需要做的是根据折半时的对称轴分类讨论得到递推式。

对于三个函数一共是⑨种情况：

$f(m, n, x)$:

- 折半的对称轴不在任何一个函数的内部
- 折半的对称轴在某个sin的内部

$g(m, n, x)$:

- 折半的对称轴不在任何一个函数的内部
- 折半的对称轴在某个sin的内部
- 折半的对称轴在最后的cos的内部

$h(m, n, x)$:

- 折半的对称轴不在任何一个函数的内部
- 折半的对称轴在某个sin的内部
- 折半的对称轴在开头的cos的内部
- 折半的对称轴在最后的cos的内部

由折半的部分合并上来的时候对于每个当前项数 i 需要 $O(i)$ 枚举对称轴两边的项数，然后对于这⑨种情况根据需要合并的角分别代入对应的和角公式与相关的函数的值。这样我们就能够在 $O(m^2)$ 的时间完成一次折半了。

时间复杂度: $O(m^2 \cdot \log n)$

期望得分：100分

7 Just for fun

关于 $f(m, n, x)$ 这个函数存在一个公式。但是这个公式比较复杂，推导过程也需要用到生成函数的相关知识，这里就不做深入展开了。