# 2012 集训队互测 洪水疏导(刘洪轩) 解题报告

天津市南开中学

刘洪轩

一、题意简述

有 N(2 <= N <= 50)个节点，每个点有一个正整数权值 V(1 <= V <= 200)且互不相同。我们要用边把这些点连接起来形成一棵有根树。同时要求每个节点的权值要大于它的父节点的权值，且它们的权值差不超过 K(1<=K<=16)，而权值最小的节点作为树根。此外，每个非叶节点都必须从它连向它的子节点中的边选择一条染上不同的颜色。求最后的方案数，只有当两个方案的连边情况和染色情况都相同，它们才被认为是同一种方案。答案模 1000000007。

二、题目分析

数据规模很小，很明显可以用基于集合的动态规划去解决。

首先所以点按权值从大到小排序，以这个顺序进行动态规划。然后只要我们给每一个非根节点确定一个父节点，树上边的连接情况就能确定。所以我们定义 DP[i][t]，i 表示处理完第 i 个节点，t 表示从权值为 v[i]+1,v[i]+2…v[i]+K 的节点，即所有父节点可能是第 i 个节点的节点中已经确定了父节点的节点的集合（若对应某一权值的节点不存在，我们可以认为它已经确定了父节点），DP[i][t]表示这种情况下的方案数。

明显的，状态数的规模是 O(n*2^k)。

然后我们考虑转移过程。这里，"处理"第 i 个节点，是指在状态转移的过程中，是指确定哪些节点的父节点是第 i 个节点即把这些点连向第 i 个节点，枚举所有可能的情况。为了方便表示，我们定义 DP'[i][t]为处理第 i 个节点之前，权值为 v[i]+1,v[i]+2…v[i]+K 的节点中已经确定了父节点的节点的集合为 t 的方案数。很明显，处理第 i 个节点之前即为处理第 i-1 个节点之后，所以所有的 DP'[i]可以用 DP[i-1]计算出来。然后我们试着用 DP'[i]计算出 DP[i]，我们会得到下面的方程。

DP[i][t] = DP'[i][t] + ∑(DP'[i][s] * count(t-s))    (s 是 t 的子集)

这里 count(k)表示集合 k 中元素的个数。

在上面的转移方程中，t 为处理第 i 个节点之前已经确定了父节点的节点集合，s 为处理之前的已经确定父节点的节点集合，这样 t-s 就是父节点是第 i 个节点的节点集合。这样的话，我们需要向第 i 个节点连接 count(t-s)条边，我们从中选择一条染色就有 count(t-s)种情况，所以需要再乘上 count(t-s)。此外我们还需要额外加上 DP'[i][t]表示没有任何节点连向第 i 个节点的情况，以为此时 t=s,count(t-s)=0，但我们需要把这种情况计算在方案数内。

我们确定转移方程后，就可以确定转移复杂度了，我们需要枚举 t 的所有子集，而 t 至多有 k 个元素，它的子集也就至多有 2^k 个，所以转移的复杂度是 O(2^k)。

这样总的复杂度就是 O(n*4^k)，当然，若在枚举子集合时进行优化，还可以做到 O(n*3^k)，但根据题目的数据范围计算发现，这两种复杂度都是不能满足要求的。

我们观察转移方程，其中后面求和的一项可以表示为

∑(DP'[i][s] * count(t-s)) = count(t) * ∑DP'[i][s] - ∑(DP'[i][s] * count(s))

我们设 sum1(s) = ∑DP'[i][s]，sum2(s) = ∑(DP'[i][s] * count(s))，若我们计算出了所有的 sum1(s)和 sum2(s)，我们就能以每一个 O(1)的时间处理每一项转移了。而 sum1(s)和 sum2(s)的计算方法相同，我们以 sum1(s)为例，用以下过程进行计算。下面的过程用伪代码表示，并且用缩进表示循环体的范围。

for each s do sum1(s) = DP'[i][s]

```
for each V ∈ 全集 do
  for each s 满足 V ∈ s do
     sum1(s) = sum1(s) + sum1(s-{V})
```

在这个过程中，开始我们令 sum1(s) = DP’[i][s]进行初始化，然后后面的循环每执行完第 k 个 V 后，每一个 sum1(s)中都存储着所有 s 的子集中仅有前 k 个元素的状态可以和 s 不同的那些集合所对应的 DP’的值的和。处理完后，就能得到 s 的子集中任意元素的状态都可以和 s 不同的集合即 s 的所有子集对应的 DP’值的和。这个过程计算的复杂度是 O(k*2^k)。

这样我们每处理一个 DP[i]时，先用这个 O(k*2^k)的过程处理出 sum1 和 sum2，再用 O(2^k)的时间计算出所有的转移。

最后总的时间复杂度是 O(n*k*2^k)，可以满足题目中的数据规模。