Bomb 解题报告

杭州学军中学 李超

题目大意：

在平面上给定 N(N<=100000)个点，要求选出三个点，它们两两之间的曼哈顿距离和的最大值和最小值。

解题思路：

先考虑只要选择两个点的情况，令 Xmax 表示两个点中 X 坐标较大的点的 X 坐标，Xmin 表示两个点中 X 坐标较小的点的 X 坐标，Ymax,Ymin 同理。则答案即为 Xmax-Xmin+Ymax-Ymin。我们先计算最大值。考虑最大值的分布，显然我们只要选出使 Xmax+Ymax,-Xmin-Ymin，Xmax-Ymin,-Xmin+Ymax 这四个表达式值最大的点暴力即可。然后计算最小值。若不考虑 Xmin=Xmax 或 Ymin=Ymax 这些极端情况，两个点的位置情况只有两种(左下，左上)，是对称的，我们只考虑其中的一种情况。以第一个点在第二个点左下方为例。则第一个点的坐标为(Xmin,Ymin)。显然，我们要查找的是 X>Xmin 且 Y>Ymin 且 X+Y 最小的点。我们可以按 X 轴从大到小枚举，保证 X>Xmin，按 Y 轴坐标维护一棵线段树，记录区间 X+Y 最小的值，在每个点处只要在线段树中查询[Ymin,+∞)中的 X+Y 最小值，更新答案，然后插入点(Xmin,Ymin)即可。时间复杂度 O(NlogN)。

接下来考虑三个点的情况。我们考虑三个点两两之间的曼哈顿距离和的实质。通过画图，我们容易发现，问题的实质是求能包含这三个点的最小矩形的周长，即 2*(Xmax-Xmin+Ymax-Ymin)，因此我们只要最大化和最小化 Xmax-Xmin+Ymax-Ymin 即可。考虑这四个未知量，显然，一个点最多确定一个 X 未知量和一个 Y 未知量，答案的组成可能有两种情况：

①一个点确定了一个 X 和一个 Y，另外两个点分别确定了一个 X 和一个 Y。

②一个点确定了一个 X 和一个 Y，另一个点同样确定了一个 X 和一个 Y，还有一个点什么都没有确定(但必须存在这个点)。

我们分别考虑这两种情况。先考虑最大值。显然，确定最大值的点一定在 Xmax+Ymax,-Xmin+Ymax,-Xmin-Ymin,Xmax-Ymin,Xmin,Xmax,Ymin,Ymax 最大的至多 8 个点中选择三个，因此只需选出能使这些值变得最大的点暴力即可。

然后考虑最小值。先考虑情况①。假设确定了 X 和 Y 的点在左上方(即该点在 3 个点中的-Xmin+Ymax 最小)，设另外两个点分别为(Xmax,Y)和(X,Ymin)。我们维护一棵线段树，维护在 X 在 i 处时首先从下方往上方依次枚举每个点作为左上角，我们使用线段树维护所有(X,Ymin)节点的 Xmax-Ymin 的最大值。每次枚举一个点，首先查询它(Xmin,+∞)中的 Xmax-Ymin 的最小值更新答案，然后将它作为可能的 Xmax 更新线段树在(-∞,Xmin)中的 Xmax-Ymin，然后把自己作为可能的 Ymin 更新线段树在这个点上的最大 Y 值，就可以完美解决情况①，时间复杂度 O(NlogN)。

对于情况②，我们枚举中间的点，然后计算四个方向上离它最近的节点，这个即为两个点求最近曼哈顿距离的情况。计算对角方向两个最近点的距离和并更新答案即可。时间复杂度仍为 O(NlogN)。

这题同样可以使用分治算法解决，时间复杂度仍为 O(NlogN)。