

可见区域解题报告

【简要描述】

给出一些互不相交的线段，线段可以阻挡视线，分别问从原点在删除线段、删除一条线段、删除两条线段下能看到的最大面积是多少。

【分析与算法设计】

请没有耐心的想直接知道 100 分做法的读者直接看算法四、六、八、九

算法一：

手算，题目给出了 3 个有规律的输入数据，自己计算一下即可得出答案，期望得分 15 分。

时间复杂度： $O(1)$

我们先来考虑不删除线段的情况：

算法二：

枚举像素点，因为精度的要求不高，而且 case4 的坐标范围很小，我们可以通过枚举像素点的方法来判断每个像素是否能被看到，从而逼近答案。再配合前 3 个点手算，期望得分 20 分。

时间复杂度： $O(\text{像素点个数} * n)$

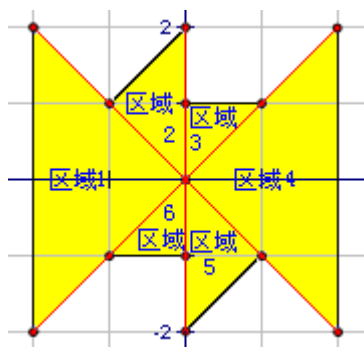
算法三：

受到枚举像素点的启发，我们可以通过暴力积分的方法来求答案，我们定一个 $d\theta$ 为角度极小量，我们把从原点看到的视野划分成 $2 * \pi / d\theta$ 块，每一块的夹角就是 $d\theta$ ，我们计算每一块能看到的那个窄长的三角形面积，然后累加，便是答案。期望得分未知。

时间复杂度： $O(2 * \pi / d\theta * n)$

算法四：

分析算法三，我们发现，其实在很多相邻的夹角区间，第一条挡住视线的线段都是同一条。进一步分析，由于线段没有相交，我们发现我们从原点开始往一个方向看，然后我们往逆时针旋转，只有当经过某条线段的端点所对应的极角时才有可能使挡住我们视线的第一条线段发生改变。这样启发我们可以按照 $2 * n$ 个线段端点所对应的极角把区间划分成 $2 * n$ 块，对于每一块第一条所挡住的线段一定是相同的，我们直接计算能看到的视野（三角形区域）的面积，累加进答案。期望得分 30 分。



时间复杂度: $O(n^2)$

算法五:

前面算法二到四都只考虑了不删除线段的情况, 对于删除线段的最简单处理就是我们可以枚举删除哪些线段, 再套用算法四。这样我们期望得分 40 分。

时间复杂度: $O(n^2 \sim n^4)$

算法六:

继续只考虑不删除线段的情况。我们发现算法四时间开销之所以大的原因是, 我们对于一个极角区间无法快速查询在这个区间里从原点看到的第一条线段是哪个。那么我们有没有办法来维护这个最先看到的线段呢? 答案是肯定的。由于线段之间不存在相交, 我们发现如果在某个极角的时候线段 a 比线段 b 要靠前 (从原点先看到线段 a), 那么不会存在一个极角使得线段 b 比线段 a 靠前 (从原点先看到线段 b)。这个良好的性质, 提示我们可以用平衡树来维护他们的序。我们从某个极角开始逆时针扫描, 碰到线段的端点, 如果这个线段还未加进树中, 便把它加入, 如果已经在树中便把它删除。而查询这个区间里第一条看到的线段, 就是当前平衡树中最小的那个元素。由于区间有 $2*n$ 个, 插入、删除事件各有 n 个, 查询数跟区间数一样也是 $2*n$ 个, 每次操作时间均是 $O(\log n)$ 于是我们得到了一个可以接受的复杂度。注意一个细节, 初始的扫描线可能会经过某些线段, 我们要把这些线段拆开。

配合前面的得分, 期望得分 60 分。

时间复杂度: $O(n \log n)$

算法七:

有删除线段的情况下, 我们继续枚举删除哪些线段, 然后我们再配合算法六, 期望得分 75 分。

时间复杂度: $O(n \log n \sim n^3 \log n)$

算法八:

不删除线段的情况我们已经完美解决了, 我们来考虑只删除一条线段的情况。首先, 很显然我们删除的线段, 一定是在某个区间里成为过第一条被原点看到的线段。我们对每一个区间分别考虑, 假如第一条看到的线段是 a, 第二条看到的线段是 b, 那么删除线段 a 的话我们能多看到被 a 挡住的区域面积-被 b 挡住的区域面积。那么我们把删除一条线段对于

所有以它作为第一条线段的区间的贡献算出来,取个最大的加上不删除线段的答案就是删除一条线段的答案。配合前面的得分,期望得分 85 分。

时间复杂度: $O(n\log n)$

算法九:

删除两条线段的情况有两种。情况 1,删除的这两条线段极角区间没有交集。对于这种情况,我们直接利用算法八的计算结果,取贡献值最大的和次大的加上不删除线段的答案就是这种情况的答案。如果贡献最大的线段和次大的线段的有重合部分,那么没有关系,因为这样算出来的答案肯定不会比最优答案优,所以我们不用特殊处理。情况 2,删除的两条线段的极角区间有交集。对于这种情况,假设删除的线段是 a 和 b ,那么它们一定会在某一个区间里是分别是原点看到的第一条线段和第二条线段。这样把它们同时删除,会对答案有额外加成,假设这个时候从原点看到的第三条线段是 c ,那么这个额外加成就等于 b 所挡住的面积- c 所挡住的面积。由于这样的 (a,b) 组合不会太多(最多 $2*n$ 个(区间个数)),我们可以对于每一种组合分别算答案。对于一对 (a,b) ,删除它们两个线段的答案就是删除 a 对答案的贡献+删除 b 对答案的贡献+同时删除 a, b 对答案的贡献+没删除线段时的答案。我们在所有这些里取最大值就是答案。至此,所有问题我们都完美解决了,期望得分 100 分。

时间复杂度: $O(n\log n)$