

拆弹计划解题报告

杭州学军中学 李超

题目大意：

在平面上给定 $N(N \leq 100000)$ 个点，每个点有一个权值，要求选出三个点，使它们两两之间的曼哈顿距离和加上它们自身的权值和最小。

解题思路：

看到此题，我们不妨先考虑没有权值的情况。为了便于思考，我们可以将每个点的坐标加上一个非常小的不同的值，如 $1e-8$ 等，保证所有点均不在同一行或同一列上，避免特殊情况干扰。

由于不带权值的情况仍然较为复杂，我们可以先考虑只要选择两个点的情况，令 X_{\max} 表示两个点中 X 坐标较大的点的 X 坐标， X_{\min} 表示两个点中 X 坐标较小的点的 X 坐标， Y_{\max}, Y_{\min} 同理。则答案即为 $X_{\max} - X_{\min} + Y_{\max} - Y_{\min}$ 。考虑两个点的位置情况，有四种，即一个点在另一个点的左上、左下、右上、右下。显然这四种情况是对称的，我们只考虑其中的一种情况。以第一个点在第二个点左下方为例。则第一个点的坐标为 (X_{\min}, Y_{\min}) 。显然，我们要查找的是 $X > X_{\min}$ 且 $Y > Y_{\min}$ 且 $X+Y$ 最小的点。我们可以按 Y 轴坐标从小到大枚举每一个点，以保证 $Y > Y_{\min}$ ，按 X 轴坐标维护一棵线段树，记录区间 $X+Y$ 最小的值，在每个点处只要在线段树中查询 $(-\infty, X)$ 中的 $X+Y$ 最小值，更新答案，然后插入当前点 (X, Y) 即可。时间复杂度 $O(N \log N)$ 。

接下来考虑三个点的情况。我们考虑三个点两两之间的曼哈顿距离和的实质。通过画图，我们容易发现，问题的实质是求能包含这三个点的最小矩形的周长，即 $2 * (X_{\max} - X_{\min} + Y_{\max} - Y_{\min})$ ，因此我们只要最大化和最小化 $X_{\max} - X_{\min} + Y_{\max} - Y_{\min}$ 即可。考虑这四个未知量，显然，一个点最多确定一个 X 未知量和一个 Y 未知量，答案的组成可能有两种情况：

① 一个点确定了一个 X 和一个 Y ，另外两个点分别确定了一个 X 和一个 Y 。

② 一个点确定了一个 X 和一个 Y ，另一个点同样确定了一个 X 和一个 Y ，还有一个点什么都没有确定(但必须存在这个点)。

先考虑情况①。同样的有对称性。不妨假设确定了 X 和 Y 的点在右上方(即该点确定 $X_{\max} + Y_{\max}$)，设另外两个点分别为 (X_{\min}, Y) 和 (X, Y_{\min}) 。我们维护一棵线段树，维护在 X 在 i 处时的之前所有点的情况，并记录在最靠下的节点中，即 (X, Y_{\min}) 中。从下方往上方依次枚举每个点作为左上角，每次枚举一个点，首先查询它 $(-\infty, X_{\min})$ 中的 $X_{\min} + Y_{\min}$ 的最大值更新答案，然后将它作为可能的 X_{\min} 更新线段树在 $(X_{\min}, +\infty)$ 中的 $X_{\min} + Y_{\min}$ ，然后把自己作为可能的 Y_{\min} 更新线段树中该点的最大 Y 值，就可以完美解决情况①，时间复杂度 $O(N \log N)$ 。

对于情况②，我们枚举中间的点，然后计算四个方向上离它最近的节点，这个即为两个点求最近曼哈顿距离的情况。计算对角方向两个最近点的距离和并更新答案即可。时间复杂度仍为 $O(N \log N)$ 。至此，没有权值的情况已经被我们解决了。

对于有权值的情况，注意到，三个点直接曼哈顿距离的实质并没有改变，在维护信息的时候，也只需要维护一些加减的信息，我们可以考虑将权值与曼哈顿距离结合起来。仍然先考虑情况①，令一号点为确定 $X_{\max} + Y_{\max}$ 的点，二号点为确定 X_{\min} 的点，三号点为确定 Y_{\min} 的点，容易列出答案的表达式 $2 * (X_1 + Y_1 - X_2 - Y_3) + Z_1 + Z_2 + Z_3$ ，整理式子，得到

$(2*X1+2*Y1+Z1)-(2*X2-Z2)-(2*Y3-Z3)$ ，我们只要简单地将维护的值，由 $X2+Y3$ ，变为 $(2*X2-Z2)+(2*Y3+Z3)$ 即可，维护与询问的方法均不变，因此这一部分时间复杂度仍然为 $O(N\log N)$ 。

对于情况②，我们同样只要将维护的内容进行一些小小地转化。仍然枚举中点，找到与它四个方向权值加上曼哈顿距离最小的点即可，由于过于简单，在此省略。时间复杂度也为 $O(N\log N)$ 。

至此，这题已经被完美解决了。