

近似平均数

almost

【题意简述】

定义 n 个数 X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 1$) 的近似平均数为 $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n-1}$

对于给出的长度为 N 的一个序列 A ，要求回答 Q 个询问。

每个询问会给出 L, R ($1 \leq L < R \leq N$)，请找出 a 与 b ($L \leq a < b \leq R$) 使得

A_a, A_{a+1}, \dots, A_b 的近似平均数最大。

$$N \leq 10^5, Q \leq 3 \times 10^4$$

【算法分析】

算法一：

对于每一次询问，枚举 a 与 b ，通过预处理的前缀和计算 $A_a \sim A_b$ 的近似平均数更新答案。

时间复杂度： $O(QN^2)$

期望得分：10 ~ 15

算法二：

由于一些测试点的 N 比较小，我们可以事先暴力计算出每一组 (a, b) 的答案，记为 $f[a][b]$ ，再通过动态规划得到每一组 (L, R) 的答案 $g[L][R]$ ，转移方程式为 $g[i][j] = \max(g[i+1][j], g[i][j-1], f[i][j])$ ，该算法可以 $O(1)$ 回答所有询问，但需要 N^2 的储存空间。

时间复杂度： $O(N^2 + Q)$

期望得分：25 ~ 35

算法三：

在算法一中，为了求得最优的 (a, b) 我们要枚举它们两个量，这一点似乎是很不优的，

重复查询了很多已知的信息，我们有没有办法减少枚举其中的一个呢？答案是肯定的，这也正是这个问题的关键所在，当左界（或右界）确定的时候，我们可以使用高效的办法在某个范围内查询出最优的右界（或左界）。

我们设 A 序列的前缀和序列为 S ，即 $S_i = \sum_{j=1}^i A_j$ ，把 (i, S_i) 看成一个二维坐标系中的点，

当左界 a 确定时，我们在 $[x, y]$ 的范围内寻找最优的 b ，实际上也就是寻找最优的 (b, S_b) 使得 (a, S_{a-1}) 与它的连线斜率最大。这样一来问题就不那么难办了，如果能够事先建立起 $[x, y]$ 内的一个凸壳，我们就可以直接用二分的方法查询最优的右界了。

综上我们得到了一个较为高效且所需空间很少的算法，对于一组询问 (L, R) ，从 R 开始到 L 为止不断加入其对应的点，并维护凸包以支持查询操作，用所有查询中得到的最优值作为答案。

时间复杂度： $O(QN \log N)$

期望得分： 35 ~ 45

算法四：

我们尝试将算法二与算法三融合起来。

在算法二中，单次询问的回答时间可以达到 $O(1)$ ，之所以这么快是因为我们做了很多预处理操作，花了大量的空间来存储这些预处理计算出的值，但随着问题规模的增大，我们再也无法花费如此多的时间预处理出所有的东西，也没有足够的空间将计算出的东西保存下来。但是仔细想想，我们真的需要事先知道那么多东西吗？还是可以通过适量地增加查询的时间来得到一个完美地平衡呢？

对，分块在这里派上用场了，我们把整个序列 A 均匀地分成 T 段，每一段的长度 $Len = \frac{N}{T}$ 。以每两段的分界点为起点，分别往左和往右使用算法三，我们可以求得所需要预处理出的 $f[i][j]$ ，表示 $(L, R) = (i, jLen)$ 或 $(jLen, i)$ 时的答案。

对于一次查询 (L, R) ，如果 L 与 R 分在了一块，我们可以直接用算法三处理，否则我们可以用预处理的 f 解决一大部分问题。若最优的 (a, b) 满足 $a > \left\lceil \frac{L}{Len} \right\rceil Len$ ，那么可以通过 $f[R][\left\lceil \frac{L}{Len} \right\rceil]$ 得到答案；若最优的 (a, b) 满足 $b < \left\lfloor \frac{R}{Len} \right\rfloor Len + 1$ ，那么可以通过 $f[L][\left\lfloor \frac{R}{Len} \right\rfloor]$ 得到答案，即 $Ans = \max\{f[R][\left\lceil \frac{L}{Len} \right\rceil], f[L][\left\lfloor \frac{R}{Len} \right\rfloor]\}$ 。但是当然不可忽

视的是,当最优的 (a,b) 满足 a 与 L 分在一块并且 b 与 R 分在一块时,我们还没有纳入计算,

事实上解决方法也很简单,再利用算法三建立出 $\left\lfloor \frac{R}{Len} \right\rfloor Len \sim l$ 的凸壳,枚举

$L \sim \left\lceil \frac{L}{Len} \right\rceil Len$ 的每个位置作为左界求出最优右界更新答案就行了。

最后,我们来考虑一下算法的复杂度,预处理部分由于分出了 T 块,所以总共要往左右做 T 次算法三,复杂度为 $O(TN \log N)$; 而询问部分由于每一块的长度 $Len = \frac{N}{T}$, 因此复杂度为 $O(\frac{NQ \log N}{T})$ 。算法总的复杂度为 $O((\frac{NQ}{T} + TN) \log N)$ 。当 $\frac{NQ}{T} = TN$, 即 $T = \sqrt{Q}$ 时,复杂度取到最小值 $O(N\sqrt{Q} \log N)$ 。

时间复杂度: $O(N\sqrt{Q} \log N)$

期望得分: 90 ~ 100

【附】

